

Chapitre. Représentation graphique de fonctions

I.Représentation graphique.

1) Repère cartésien

On appelle repère cartésien, un couple de deux droites graduées.

Le premier axe est appelé axe des abscisses.

Le deuxième axe est appelé axes des ordonnées.

Ils se coupent en l'origine du repère (i.e. le point origine de chaque axe)

On appelle **repère orthogonal** un repère dont les axes sont perpendiculaires. L'axe des abscisses est alors l'axe horizontal, et l'axe des ordonnées est l'axe vertical.

On appelle **repère normé** un repère dont les axes ont la même unité.

On appelle **repère orthonormé** un repère dont les axes sont perpendiculaires et ont la même unité.

2) Représentation graphique de fonction

Dans un repère cartésien, on appelle représentation graphique de la fonction f , l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Cette représentation graphique a ce qu'on appelle une **équation**. Ce mot n'a pas du tout le même sens que dans la définition de "résoudre une équation". Ici, il s'agit juste d'une égalité servant à donner une expression de l'ordonnée d'un point de la RG (c'est y) en fonction de son abscisse (c'est x).

Il faut faire attention à ne pas confondre:

- *la fonction f , c'est-à-dire le processus de transformation d'un nombre en un autre,*
- *$f(x)$, l'image du nombre x par cette fonction f . $f(x)$ est un nombre.*
- *la représentation graphique de f , notée souvent C_f , qui est un ensemble de points au sens géométrique du terme.*
- *$y = f(x)$ qui est une équation de la représentation graphique de la fonction f . Par ex*

Grâce à la représentation graphique d'une fonction f , on peut retrouver:

- ***l'image d'un nombre:** si on cherche l'image d'un nombre x , on repère le point d'abscisse x de la représentation graphique de f . Son image est l'ordonnée de ce point.*
- ***les antécédents d'un nombre:** si on cherche les antécédents d'un nombre y , on repère le ou les points d'ordonnée y de la représentation graphique de f . Les antécédents de y sont les abscisses de ces points.*

Il faut alors tracer les pointillés et bien représenter les points utilisés par des croix.

Exemple: représentation de la fonction f qui pour tout x associe x^2 .

On a donc $f(x) = x^2$

La courbe passe par le point de coordonnées

$C(2, 4)$,

Donc $f(2) = 4$.

Il y a deux points sur la courbe qui ont pour ordonnée 4.

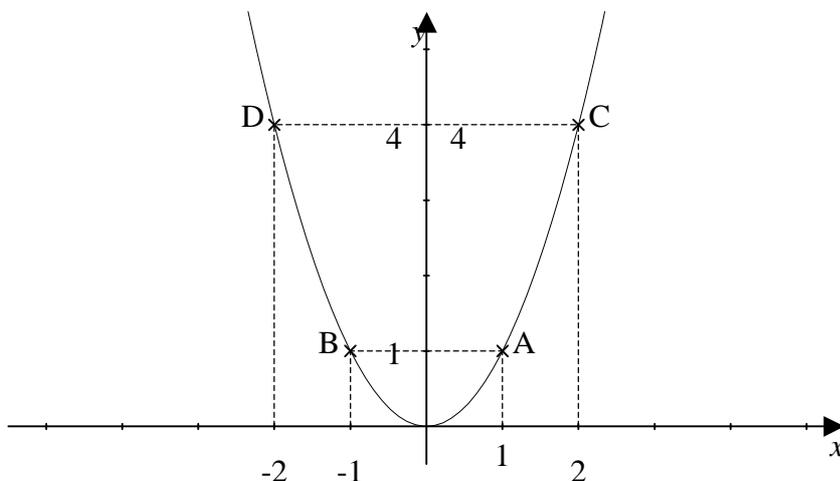
Graphiquement, on sait donc que 4 a deux antécédents par la fonction f : -2 et 2.

(il existe deux nombres x tels que $f(x) = 4$.)

Ici, comme $f(x) = x^2$, une équation de la représentation graphique de cette courbe est:

$$y = x^2$$

(pour l'anecdote, cette courbe s'appelle une parabole)



II. Représentation graphique d'une fonction linéaire.

1) Représentation graphique d'une fonction linéaire

Théorème: la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées $(1, a)$.

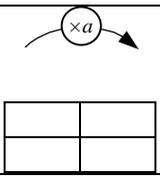
Remarque, si la fonction s'appelle f , on a pour tout x , $f(x) = ax$
On considère un point A (x, y) de la RG de f , on a $y = f(x)$, donc $y = ax$

*Notation et vocabulaire: on dit que $y = ax$ est une équation de la droite représentant graphiquement la fonction linéaire f de coefficient a .
 a est appelé coefficient directeur de la droite.*

La notion de coefficient directeur n'existe QUE pour les droites.

Lien avec les autres disciplines mathématiques.

On a vu au chapitre précédent, le coefficient de proportionnalité d'une situation de proportionnalité était égal au coefficient de proportionnalité de la fonction linéaire qu'on pouvait lui associer. Ici, on peut aller un peu plus loin puisqu'on voit aussi que c'est le coefficient directeur de la droite représentant cette fonction linéaire.

	<i>algèbre</i>	<i>analyse</i>	<i>géométrie analytique</i>
	<i>tableau de proportionnalité</i>	<i>fonction linéaire</i>	<i>droite passant par l'origine du repère</i>
		$f(x) = ax$	$y = ax$
a	<i>coefficient de proportionnalité</i>	<i>coefficient de linéarité</i>	<i>coefficient directeur</i>

exemple 1: Représentation graphique de la fonction linéaire f de coefficient de linéarité 3.

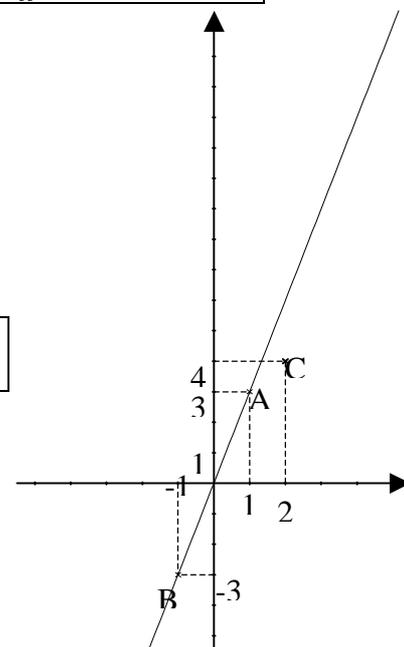
f est une fonction linéaire donc $f(0) = 0$

$$f(2) = 2 \times 3 \qquad f(2) = 6$$

f est une fonction linéaire, donc sa représentation graphique est la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées $(2, 6)$.

$y = 3x$ est une équation de la représentation graphique de f .
3 est le coefficient directeur de cette représentation graphique.

Remarque: on peut trouver graphiquement le coefficient directeur de la droite en cherchant l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 1.
(nous verrons une autre méthode dans la suite de chapitre).



2) Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire en exercice

Méthode:

i) calculer l'image d'un nombre par la fonction.

ii) Ecrire la phrase, " f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère et le point A $(.., ..)$ "

Application

f est la fonction linéaire définie pour tout x par $f(x) = -2x$

Rédaction:

$$f(4) = -2 \times 4 \qquad f(4) = -8$$

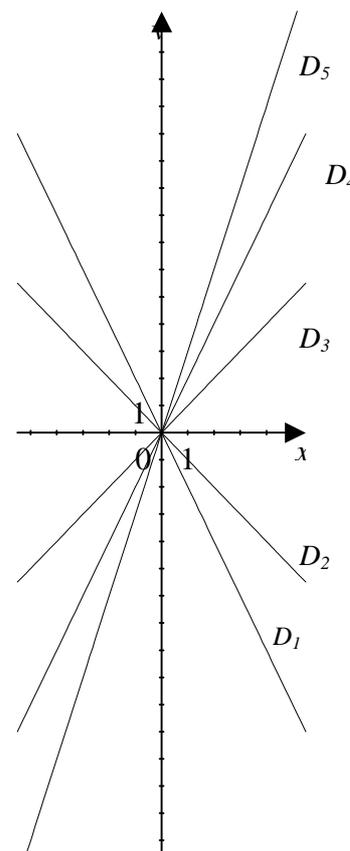
f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère et le point A $(4, -2)$.

Tracer ensuite la droite passant par l'origine du repère et le point A $(-2, 8)$.

3) Interprétation graphique du coefficient directeur.

Le coefficient directeur a de la droite d d'équation $y = ax$ indique:

- *le sens de d :*
 - si $a > 0$, d monte de la gauche vers la droite.*
 - si $a < 0$, d descend de la gauche vers la droite.*
- *l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses: plus le coefficient directeur est proche de 0, et moins la droite est inclinée.*



Exemple :

Tracer les droites suivantes :

D_1 d'équation $y = -2x$

D_2 d'équation $y = -x$

D_3 d'équation $y = x$

D_4 d'équation $y = 2x$

D_5 d'équation $y = 3x$

Remarque :

Si D a pour équation $y = ax$, alors D passe par le point de coordonnées $(1, a)$.

Autre remarque: $y = -x$ s'écrit aussi $y = -1x$

Le coefficient directeur de la droite est donc -1 .

III. Représentation graphique d'une fonction affine:

1) Définition: fonction linéaire associée à une fonction affine:

Si f est une fonction affine définie pour tout x par $f(x) = ax + b$, alors, la fonction g définie pour tout x par $g(x) = ax$, est appelée fonction linéaire associée à la fonction affine f .

Exemple : si f est une fonction affine définie pour tout x par : $f(x) = 3x + 5$

Alors la fonction g définie pour tout x par : $g(x) = 3x$ est la fonction linéaire associée à f .

2) Représentation graphique d'une fonction affine.

Dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est une droite:

- *parallèle à la RG de la fonction linéaire associée.*
- *passant par le point de coordonnées $(0; b)$*

On dit que $y = ax + b$ est une équation de la droite représentant graphiquement la fonction $f : x \mapsto ax + b$.

On dit aussi que:

a est le coefficient directeur de la droite

b est l'ordonnée à l'origine de la droite.

Exemple: représentation graphique de la fonction f définie pour tout x par:

$$f(x) = 2x + 3$$

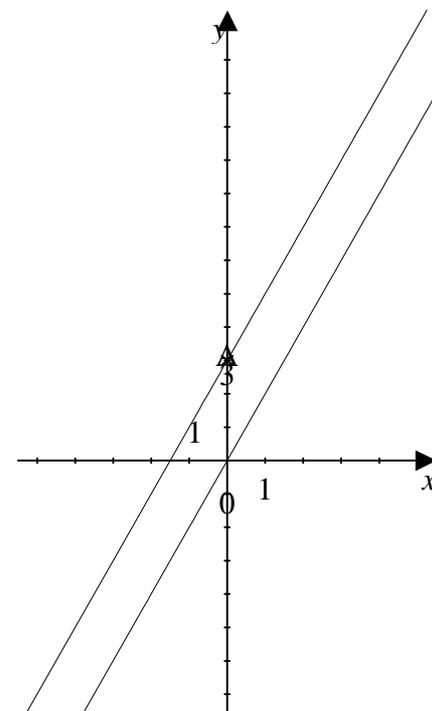
f est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite parallèle à la droite d'équation $y = 3x$ et passant par le point de coordonnées $(0, 3)$.

Une équation de cette droite est $y = 2x + 3$

2 est le coefficient directeur de la droite.

3 est l'ordonnée à l'origine de la droite.

Cette méthode est peu utilisée pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine. Une autre méthode, plus pratique est présentée dans le 3) . Elle peut être utilisée en cours et en contrôle.



3) Tracer la représentation graphique d'une fonction affine en exercice

Méthode:

- i) calculer les images de 2 nombres par la fonction.
 ii) Ecrire la phrase, " f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite (AB) passant par les points A (... , ...) et B (... , ...)"

Application

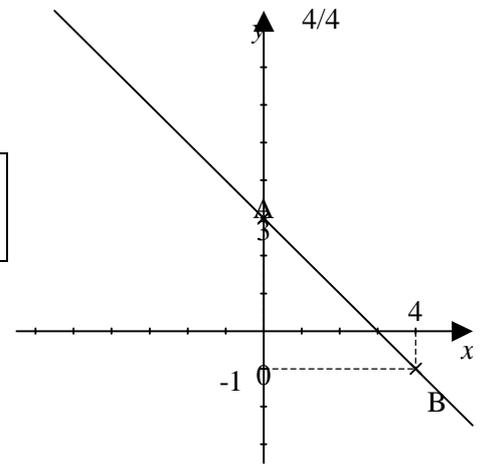
Tracer la représentation graphique de la fonction f définie pour tout x par:

$$f(x) = -x + 3$$

Rédaction:

$$f(0) = 3 \qquad f(4) = -4 + 3 \qquad f(4) = -1$$

f est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite passant par les points de coordonnées $(0, 3)$ et $(4, -1)$



Tracer sur un repère les deux points de coordonnées $(0, 3)$ et $(4, -1)$ et tracer la droite passant par ces deux points.

4) Tracer la représentation graphique d'une fonction constante en exercice

Par une fonction constante ($f: x \mapsto b$), tous les nombres ont la même image. Donc tous les points de la représentation graphique de la fonction ont la même ordonnée. Donc la RG est une droite parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y = b$.

Méthode:

- i) calculer les images de 2 nombres par la fonction.
 ii) Ecrire la phrase, " f est une fonction constante, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y = b$ ".

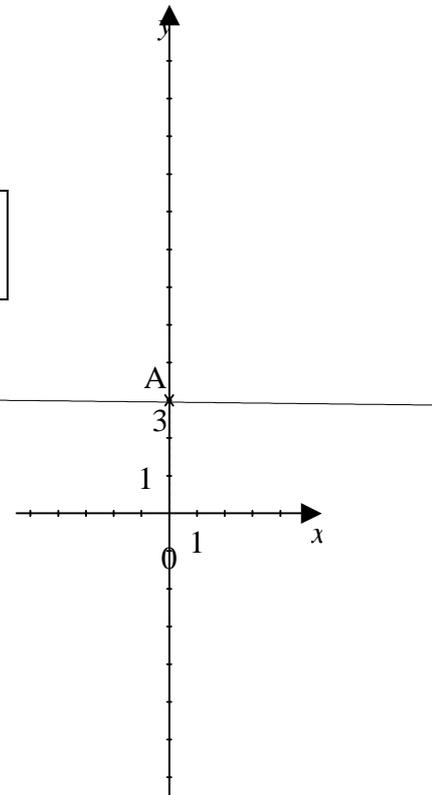
Application

Tracer la représentation graphique de la fonction f définie pour tout x par: $f(x) = 3$

Rédaction:

f est une fonction constante, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y = 3$.

Tracer sur un repère le point de coordonnées $(0; 3)$ et tracer la droite horizontale passant par ce point..



5) Déterminer le coefficient directeur d'une droite

Si A et B ont pour coordonnées A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) , ($x_A \neq x_B$) alors il existe une fonction affine f définie pour tout x par $f(x) = ax + b$ avec

$$f(x_A) = y_A \quad \text{et} \quad f(x_B) = y_B$$

$$\text{On sait que } a = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} \text{ donc } a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Th: Si A et B ont pour coordonnées A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) alors le coefficient

directeur de (AB) est : $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

A noter:

Si une droite D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, cela veut dire que les abscisses de points peuvent prendre plusieurs valeurs.

Si A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) sont deux points différents, alors ils ont des abscisses différentes. On peut donc définir le coefficient directeur a , et la droite a une équation de la forme $y = ax + b$.

La fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, admet alors D pour représentation graphique.

remarque 1: toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

6) Trouver une équation de droite

exemple 1: On considère deux points: A $(5; 8)$ B $(9; 20)$. Trouver une équation de la droite (AB) .

- 1) D est une droite dont une équation est $y = ax + b$.
 2) $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad a = \frac{8 - 20}{5 - 9} \qquad a = \frac{-12}{-4} \qquad a = 3$
 2) L'équation de droite précédente devient: $y = 3x + b$.
 3) On remplace dans l'équation avec les coordonnées de A ou B:
 $8 = 3 \times 5 + b \qquad \text{donc } b = 8 - 15 \qquad b = -7$.
 Conclusion: une équation de la droite D est $y = 3x - 7$.