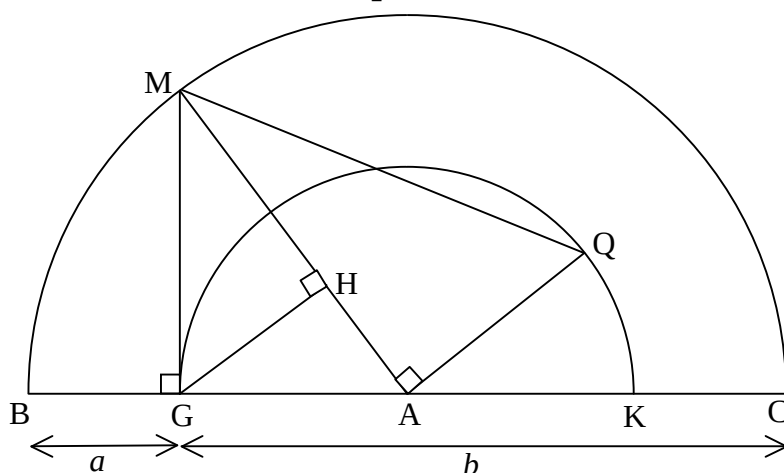


Devoir maison pour la rentrée des vacances de Noël



Les demi-cercles tracés ont pour centre A et diamètres [BC] et [GK].

a) Exprimer en fonction de a et b (avec $a \leq b$), les longueurs MA, MG, MQ et MH.

b) A l'aide de considérations géométriques, ranger par ordre croissant: a , b , MA, MG, MQ et MH.

Info: a et b désignant deux nombres positifs,

Il existe 4 sortes de moyenne pour deux nombres.

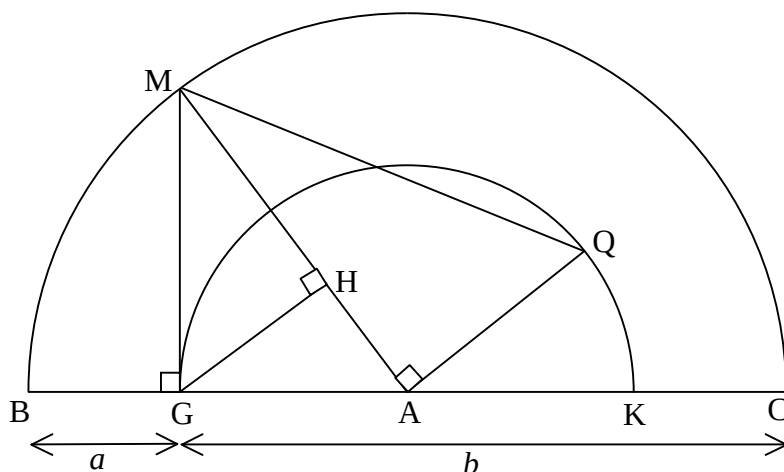
$m = \frac{a+b}{2}$ s'appelle la moyenne arithmétique

$g = \sqrt{ab}$ s'appelle la moyenne géométrique

$h = \frac{2ab}{a+b}$ s'appelle la moyenne harmonique

$q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ s'appelle la moyenne quadratique

Devoir maison pour la rentrée des vacances de Noël



Les demi-cercles tracés ont pour centre A et diamètres [BC] et [GK].

a) Exprimer en fonction de a et b (avec $a \leq b$), les longueurs MA, MG, MQ et MH.

b) A l'aide de considérations géométriques, ranger par ordre croissant: a , b , MA, MG, MQ et MH.

Info: a et b désignant deux nombres positifs,

Il existe 4 sortes de moyenne pour deux nombres.

$m = \frac{a+b}{2}$ s'appelle la moyenne arithmétique

$g = \sqrt{ab}$ s'appelle la moyenne géométrique

$h = \frac{2ab}{a+b}$ s'appelle la moyenne harmonique

$q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ s'appelle la moyenne quadratique

Correction complète:

Calcul de MA:

MA est le rayon du cercle de diamètre [BC].

Or $BC = a + b$.

$$\text{Donc } MA = \frac{a + b}{2}$$

Calcul de MG

[MA] et [AB] sont deux rayons du cercle de diamètre [BC]. Donc $MA = AB$

Comme $G \in [AB]$, $AB = AG + GB$

Donc $AG = AB - GB$

$$AG = \frac{a + b}{2} - a$$

$$AG = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{2a}{2}$$

$$AG = \frac{b - a}{2}$$

MAG est un triangle rectangle en G. On peut appliquer le théorème de Pythagore.

$$MA^2 = MG^2 + GA^2$$

$$MG^2 = MA^2 - GA^2$$

$$MG^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b - a}{2}\right)^2$$

$$MG^2 = \left(\frac{a + b + b - a}{2}\right) \left(\frac{a + b - b + a}{2}\right) \text{ (identité remarquable)}$$

$$MG^2 = b a$$

MG est une longueur donc MG est positif.

$$MG = \sqrt{ab}$$

Calcul de MQ:

MAQ est rectangle en A.

On applique le théorème de Pythagore.

$$MQ^2 = MA^2 + AQ^2$$

Comme $AG = AQ$

$$MQ^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b - a}{2}\right)^2$$

$$MQ^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab}{4}$$

$$MQ^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{4}$$

$$MQ^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Calcul de MH:

les triangles GHM et GMA sont rectangles respectivement en H et G.

$$\text{Donc } \cos \widehat{GMA} = \frac{GM}{MA}$$

$$\cos \widehat{GMH} = \frac{HM}{GM}$$

Comme $\widehat{GMH}$ et $\widehat{GMA}$ sont le même angle, on a $\frac{GM}{MA} = \frac{HM}{GM}$

$$\text{Donc } HM = \frac{GM \times GM}{MA}$$

$$HM = \frac{GM^2}{MA} \quad HM = \frac{ab}{\frac{a + b}{2}}$$

$$\text{soit } HM = \frac{2ab}{a + b}$$

b) L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle.

GHM est rectangle en H, donc $HM < GM$.

GMA est rectangle en G donc $GM < MA$.

MAQ est rectangle en A donc $MA < MQ$.

bilan: $MH < MG < MA < MQ$

GHA est rectangle en H, donc $HA < GA$.

Donc H appartient au demi-disque de centre A de rayon AG.

si P est le point d'intersection de [MH] et du cercle de centre A et de rayon AG,

$P \in [MH]$, donc $MH = MP + PH$. donc $MP < MH$

Or $MP = BG = a$

donc $a < MH$

bilan: $a < MH < MG < MA < MQ$

Il reste à montrer géométriquement que $MQ < b$

Par inégalité triangulaire, $MQ < AM + AQ$

$MQ < AM + AG$

$$MQ < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$$

$$MQ < \frac{2b}{2}$$

$MQ < b$

bilan: $a < MH < MG < MA < MQ < b$