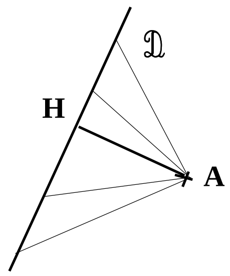
Chapitre. Distance d'un point à une droite. Applications

I. Distance d'un point à une droite. pas dans le socle

1) Définition.



Définition: on appelle distance d'un point à une droite la plus courte distance séparant ce point de n'importe quel point de la droite.

Théorème: la distance d'un point à une droite est la distance séparant ce point du pied de la perpendiculaire à la droite passant par ce point.

Autre formulation:

Théorème: soit A un point et D une droite. On appelle H le pied de la perpendiculaire à D passant par A. La distance du point A à la droite D est la longueur AH, c'est-à-dire la distance du point A au point H.

Démonstration du théorème.

On considère une droite 𝔇 et un point A extérieur à la droite 𝔇.

On note H le pied de la perpendiculaire à 𝔇 passant par A.

On considère un point M sur la droite 𝔇 différent du point H.

Le triangle AHM est un triangle rectangle en H.
On peut appliquer le théorème de Pythagore.
$AM^2 = AH^2 + HM^2$
Comme HM^2 est une grandeur positive, on en déduit que $AM^2 > AH^2$
AM et AH sont des longueurs, donc des nombres positifs. donc AM > AH.
(on admet que si deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces deux nombres, théorème du programme de seconde mais qui peut se démontrer en troisième avec les élèves).
Donc AH est la plus courte distance séparant le point A de n'importe quel point de la droite 𝔇.

C'est donc la distance du point A à la droite 𝔇.

II. Tangente à un cercle

1) Définition

Définition: On considère une droite 𝒟 et un cercle 𝒞.

On dit que la droite 𝒟 est tangente au cercle 𝒞 si cette droite et le cercle on un seul point commun.

Théorème:
On considère un cercle et une droite.
Si la distance du centre du cercle à la droite est égale au rayon du cercle, alors la droite et le cercle sont tangents.
Réciproquement, si la droite et le cercle sont tangents, alors la distance du centre du cercle à la droite est égale au rayon du cercle.

Autre formulation:

On considère un cercle 𝒞 de centre O de rayon R, et une droite 𝒟.

Si la distance du point O à la droite 𝒟 est égale à R, alors la droite et le cercle sont tangents.

Réciproquement, si la droite et le cercle sont tangents, alors la distance du point O à la droite 𝒟 est égale à R

Dans le cadre du socle, il est seulement attendu que les élèves sachent reconnaître qu'une droite est tangente à un cercle.

2) Construction de la tangente à un cercle en l'un de ses points *pas dans le socle*

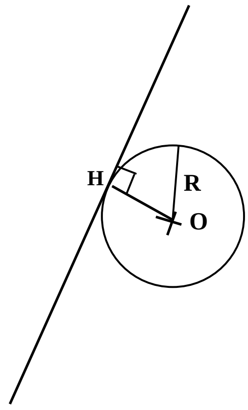
Analyse du problème.

On considère une droite 𝔇 et un cercle ℭ de centre O de rayon *R*.

On suppose que la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$ sont tangents en M.
On a donc OM = R.
De plus, OM est la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

Donc M est le pied de la perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par O.

Donc (OM) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.



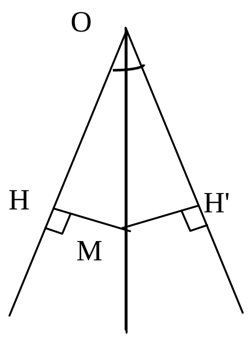
Théorème

Théorème: Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et M un point du cercle. La droite tangente à $\mathscr{C}$ en M est la droite perpendiculaire à (OM) passant par M.

<u>Conséquence</u>: si on veut tracer la droite tangent à $\mathscr{C}$ en M, il suffit de tracer la perpendiculaire à (OM) passant par M.

III. <u>Les bissectrices d'un triangle.</u>

1) <u>Bissectrice d'un angle.</u>



<u>Définition</u>: la bissectrice d'un angle est la demi-droite séparant cet angle en deux angles adjacents de même mesure. *dans le socle: connaître et utiliser cette définition*

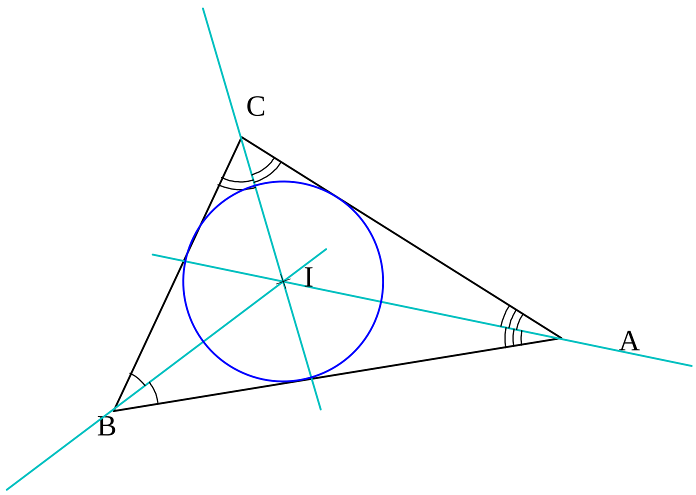
Dans le socle: les élèves tracent la bissectrice d'un angle par la méthode de leur choix.

<u>Théorème</u>: la bissectrice d'un angle est l'ensemble de tous les points intérieurs à l'angle situés à égale distance des côtés de l'angle.
ce théorème ne fait pas partie du socle

2) <u>Bissectrices d'un triangle.</u> *pas dans le socle*

<u>Définition</u>: une bissectrice d'un triangle est la bissectrice d'un angle au sommet du triangle.

<u>Théorème</u>: les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit au triangle.



<u>Conséquence:tracer le cercle inscrit dans un triangle</u> *(pas dans le socle)*
pour tracer le cercle inscrit dans un triangle, il faut:

- tracer deux bissectrices du triangle. Elles se coupent en un point I qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
- tracer la perpendiculaire à un côté passant par I. Elle coupe se côté en H.
- Tracer le cercle de centre I passant par H.